

Soit $I = [a, b]$ fermé borne de \mathbb{R} et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Il est possible de définir l'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ comme limite de somme de Riemann. Notre but est d'étendre cette définition à des fonctions définies sur l'ouvert $I =]a, b[$ borné ou non.

Par exemple peut-on donner un sens à

$$\int_0^{+\infty} \ln(x) dx?$$

I. Intégrale généralisée d'une fonction continue
sur $[a, b[$, ~~bornée~~, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

I.1. Définitions.

Définition 1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la fonction f est continue sur $[a, b[$. On pose $\forall x \in [a, b[$:

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ la primitive de f qui s'annule en a .

Si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe et est finie, on dit que l'intégrale généralisée converge et on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$$

Sinon on dit que l'intégrale généralisée diverge.

Remarques

1. De même on définit $\int_a^b f(t) dt$ lorsque f est définie continue sur $]a, b]$ (c.à.d. $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).

2 - La nature de l'intégrale généralisée dépend du comportement de f au voisinage en b .

Soit $c \in [a, b[$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \underbrace{\int_c^x f(t) dt}_{G(x)} \\ &= \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt \end{aligned}$$

Donc si $\int_a^b f(t) dt$ converge vers l , alors $\int_c^b f(t) dt$ converge vers $l - F(c)$. La valeur de l'intégrale est modifiée mais pas sa nature.

3. Il n'y a pas de condition nécessaire de convergence.

Définition 2 Le reste d'une intégrale généralisée convergente est une fonction notée R définie par

$$R(x) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b[.$$

Exemples standards: Intégrales de Riemann. (*)

1°/ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2°/ $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$ et dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Les preuves se font par calcul direct de la primitive.

Exercice Etudions les intégrales suivantes :

1°/ $\int_0^1 \ln(t) dt$. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$

La primitive de $\ln(t)$ qui s'annule en 1 est $t \ln t - t + 1$.

$\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et elle est égale à -1 .

2° $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$ diverge car

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) dt = x(-1 + \ln(x)) + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

3° $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut 1.

4° $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.

Définition 3. (Extension de la définition 1)

On considère une fonction f continue sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent et dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Le choix de c est arbitraire.

Exemples

1° $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$, 2° $\int_0^{+\infty} \ln(t) dt$, 3° $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ 4° $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$.

I.2 Propriétés des intégrales généralisées convergentes

Théorème 1 Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et 2 fonctions f et g continues sur $]a, b[$. On suppose $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors on a les propriétés suivantes:

1. Relation de Chasles: $\forall c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

2. Linéarité $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

dès que deux intégrales sur les trois convergent

3. Si $f \geq 0$ sur $]a, b[$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

4. Si $f > 0$ sur $]a, b[$ alors $\int_a^b f(t) dt > 0$

5. Si $f \geq g$ sur $]a, b[$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

II.3. Méthodes de Calcul

a) Par primitive ou intégration par partie

Soit f continue sur $[a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Pour calculer F on utilise les méthodes classiques de Calcul d'une intégrale d'une fonction continue sur un fermé borné.

b) Par Changement de variable

Cette méthode peut être utilisée directement sur l'intégrale généralisée sans modification de la nature, et de sa valeur s'il y a convergence.

Théorème 2 soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f continue sur $]a, b[$.

On considère $\phi :]a, b[\rightarrow]l_1, l_2[$ (de classe C^1) strictement monotone avec $l_1 = \lim_{t \rightarrow a} \phi(t)$ et $l_2 = \lim_{t \rightarrow b} \phi(t)$

Alors les intégrales

$$\int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt \text{ et } \int_{l_1}^{l_2} f(u) du$$

sont de même nature.
 Si plus si l'une converge l'autre converge et elles sont égales.

]]

Exemple Etudions $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt$ avec $x = \text{Arctan } t$

$$\phi(t) = \text{Arctan } t$$

ϕ est de classe C^1 strictement monotone

sur $[0, +\infty[$ et $\phi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(x))^2}{(1 + (\tan x)^2)} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}$$

III. Cas où f est une fonction positive sur $[a, b[$
 (fonctions de signe constants au voisinage de b)

Résultats sur les fonctions monotones.

a) Toute fonction croissante et majorée sur $[a, b[$ admet une limite finie en b .

b) Toute fonction croissante et non majorée sur $[a, b[$ admet une limite infinie en b .

III. 1. Condition nécessaire et suffisante de Convergence

Théorème 3 Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f continue et positive sur $[a, b[$.

On pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ alors

i) $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si F est majorée sur $[a, b[$

ii) $\int_a^b f(t) dt$ diverge si $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = +\infty$
 (F croissante car f positive)

III. 2. Théorème de comparaison

Théorème 4 : Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et deux fonctions f et g continues et positives sur $[a, b[$. S'il existe $c \in [a, b[$ t.q. $\forall x \in [c, b[$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ alors

1°) $\int_a^b g(t) dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ converge.

2°) $\int_a^b f(t) dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t) dt$ diverge.

Remarque : La positivité est une hypothèse fondamentale dans ce résultat.

Exemple : $-x \leq \frac{1}{x^2} \forall x \in [1, +\infty[$
 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge alors que $\int_1^{+\infty} -x dx$ diverge.

Corollaire. Règle des équivalents

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f et g 2 fonctions continues et positives sur $[a, b[$. Si f est équivalent à g en b soit $f \sim_b g$, alors $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature.

En effet $f \sim_b g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Donc au voisinage de b , on a :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \varepsilon \quad \left(\lim_{x \rightarrow b^-} \varepsilon(x) = 0 \right)$$

$$(1 - \varepsilon) g(x) \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon) g(x)$$

et par suite d'après le théorème 4, $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature.

Exemples

1°) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x^3+1}}$ est convergente car

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^3+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ converge } (\frac{3}{2} > 1)$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x^3+1}} \text{ w } \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x^3+1}} \text{ converge.}$$

2°) $\int_0^1 \frac{\text{Arctan } x^2}{x^{5/2}} dx$ est convergente car

$$\frac{\text{Arctan } x^2}{x^{5/2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}} \quad \forall x \in]0,1[$$
$$\geq 0 \quad \geq 0$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} \text{ w } \left(\alpha = \frac{1}{2} < 1 \right) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\text{Arctan } x^2}{x^{5/2}} dx \text{ converge.}$$

Remarque

Si f admet une limite finie non nulle en $+\infty$,
alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge. (*)

Mais, une intégrale peut être convergente
pour que la fonction tende vers 0.

Par exemple $\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$. (cf les séries)
~~(voir ci-dessous)~~ (*)

IV. Convergence absolue

Définition Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction
continue sur $[a, b[$.

Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, on dit que l'intégrale
 $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.
→ suite

Si $\int_a^b f(t) dt$ convergente et $\int_a^b |f(t)| dt$ diverge,
on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est Semi-Convergente.
~~Exemple~~ Exemple (voir T.D.)

Théorème 5: Soit $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue sur $[a, b[$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente
alors l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge et dans

ce cas

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Preuve. L'astuce est d'écrire,

$$f = (f + |f|) - |f|.$$

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est abs. convergente

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

Les intégrales $-\int_a^b |f(t)| dt$ et $\int_a^b (f + |f|) dt$ sont convergentes

Donc par linéarité $\int_a^b f(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b (f(t) + |f(t)|) dt - \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\forall x \in [a, b[\quad \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Règle d'Abel.

Soit f une fonction positive et décroissante vers 0 sur $[a, +\infty[$. Soit g une fonction continue admettant une primitive bornée sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$$

converge.

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

En 0, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, donc $\frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, $f(t) = \frac{1}{t}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et la fonction $g(t) = \sin t$ continue sur $[1, +\infty[$ admettant une primitive - cos t bornée sur $[1, +\infty[$.

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ est convergente}$$

Critère de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.
 f est une fonction de signe quelconque au voisinage de b .

Il s'agit d'un critère de comparaison avec les intégrales de Riemann.

1° $b = +\infty$
 S'il existe $\alpha > 1 + q$. $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.
 S'il existe $\alpha \leq 1 + q$. $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

2° $b \in \mathbb{R}$
 S'il existe $\alpha < 1 + q$. $(b-t)^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} 0$, alors $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.
 S'il existe $\alpha \geq 1 + q$. $(b-t)^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow b^-]{} +\infty$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Cas de fonctions de signe quelcon non constant

Pour l'étude, on suit le processus suivant

1° S'assurer que la fonction n'est pas de signe constant au voisinage de b .

2° Étudier l'absolue convergence.

3° Si on n'a pas l'absolue convergence, on peut alors effectuer une intégration par parties ou un changement de variables.

4° Enfin, on se débrouille, comme on peut.

Supplémentaire

• L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente

$$\text{car } \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Ceci permet de définir les fonctions dites d'ordre exponentiel, c'est à dire les fonctions $f(x)$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \text{ est convergente.}$$

Les fonctions $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sont d'ordre exponentiel.

Transformée de Laplace



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..